Problemas propuestos

Hallar dy/dx en los Problemas 25-35.

25. $y = \ln(4x - 5)$ *Sol.* $4/(4x - 5)$

26. $y = \ln\sqrt{3 - x^2}$ *Sol.* $x/(x^2 - 3)$

27. $y = \ln 3x^5$ *Sol.* $5/x$

28. $y = \ln(x^2 + x - 1)^3$ *Sol.* $(6x + 3)/(x^2 + x - 1)$

29. $y = x \cdot \ln x - x$ *Sol.* $\ln x$

30. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tag} x)$ *Sol.* $\sec x$

31. $y = \ln(\ln \operatorname{tag} x)$ *Sol.* $2/(\operatorname{sen} 2x \ln \operatorname{tag} x)$

32. $y = (\ln x^2)/x^2$ *Sol.* $(2 - 4 \ln x)/x^3$

33. $y = \frac{1}{5}x^5(\ln x - \frac{1}{5})$ *Sol.* $x^4 \ln x$

34. $y = x(\operatorname{sen} \ln x - \cos \ln x)$ *Sol.* $2 \operatorname{sen} \ln x$

35. $y = x \ln(4 + x^2) + 4 \operatorname{arc\,tag} \frac{1}{2}x - 2x$
Sol. $\ln(4 + x^2)$

36. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x$ en uno de sus puntos (x_0, y_0). Deducir un procedimiento para trazar la tangente a la curva utilizando la intersección con el eje y.

37. Estudiar la función: $y = x^2 \ln x$. *Sol.* Min. en $x = 1/\sqrt{e}$, P.I. en $x = 1/e^{3/2}$.

38. Demostrar que el ángulo de intersección de las curvas $y = \ln(x - 2)$ e $y = x^2 - 4x + 3$ en el punto $(3, 0)$ es $\phi = \operatorname{arc\,tag} 1/3$.

Hallar dy/dx en los Problemas 39-46.

39. $y = e^{5x}$ *Sol.* $5e^{5x}$

40. $y = e^{x^3}$ *Sol.* $3x^2e^{x^3}$

41. $y = e^{\operatorname{sen} 3x}$ *Sol.* $3e^{\operatorname{sen} 3x} \cos 3x$

42. $y = 3^{-x^2}$ *Sol.* $-2x \cdot 3^{-x^2} \ln 3$

43. $y = e^{-x} \cos x$ *Sol.* $-e^{-x}(\cos x + \operatorname{sen} x)$

44. $y = \operatorname{arc\,sen} e^x$ *Sol.* $e^x/\sqrt{1 - e^{2x}}$

45. $y = \operatorname{tag}^2 e^{3x}$ *Sol.* $6e^{3x} \operatorname{tag} e^{3x} \sec^2 e^{3x}$

46. $y = e^{e^x}$ *Sol.* $e^{(x + e^x)}$

47. Si $y = x^2e^x$, demostrar que $y''' = (x^2 + 6x + 6)e^x$.

48. Si $y = e^{-2x}(\operatorname{sen} 2x + \cos 2x)$, demostrar que $y'' + 4y' + 8y = 0$.

49. Estudiar la función: (*a*) $y = x^2e^{-x}$, (*b*) $y = x^2e^{-x^2}$.
Sol. (*a*) Max. en $x = 2$; min. en $x = 0$; P.I. en $x = 2 \pm \sqrt{2}$
(*b*) Max. en $x = \pm 1$; min. en $x = 0$; P.I. en $x = \pm 1{,}51$, $x = \pm 0{,}47$.

50. Hallar el rectángulo de área máxima que tiene uno de sus vértices sobre la curva $y = e^{-x^2}$ y uno de sus lados sobre el eje x.
Ind: $A = 2xy = 2xe^{-x^2}$, siendo $P(x,y)$ un vértice del rectángulo sobre la curva. *Sol.* $A = \sqrt{2/e}$.

51. Demostrar que las curvas $y = e^{ax}$ e $y = e^{ax} \cos ax$ son tangentes en los puntos $x = 2n\pi/a$ ($n = 1,2,3,\ldots$) y que las curvas $y = e^{-ax}/a^2$ e $y = e^{ax} \cos ax$ son mutuamente perpendiculares en los mismos puntos.

52. Dada la curva $y = xe^x$, demostrar (*a*) que el punto $(-1, -1/e)$ es un número relativo, (*b*) que el punto $(-2\ -2/e^2)$ es un punto de inflexión y (*c*) que la curva es convexa a la izquierda y cóncava a la derecha del punto de inflexión.

Hallar dy/dx en los Problemas 53-56, aplicando la derivación logarítmica.

53. $y = x^x$ *Sol.* $x^x(1 + \ln x)$

54. $y = x^{\ln x}$ *Sol.* $2\,x^{(\ln x - 1)} \ln x$

55. $y = x^2 e^{2x} \cos 3x$ *Sol.* $x^2 e^{2x} \cos 3x \{2/x + 2 - 3 \operatorname{tag} 3x\}$

56. $y = x^{e^{-x^2}}$ *Sol.* $e^{-x^2} x^{e^{-x^2}} (1/x - 2x \ln x)$

57. Demostrar (*a*) $\dfrac{d^n}{dx^n}(xe^x) = (x + n)e^x$, (*b*) $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} \ln x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.